Statische Meßfehler und Meßunsicherheiten

$$\Delta x = x - x_w$$

x: angezeigter Wert (Ist-Wert)
x_w: richtiger (wahrer) Wert (Soll-Wert)

Systematische Fehler

Zufällige Fehler

(Grobe Fehler)

Fortpflanzung der systematischen Meßfehler

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\Delta y = y - y_w$$
$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Entwicklung als Taylorreihe, Abbruch nach dem linearen Glied:

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$
$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \qquad \text{für } \Delta x_i << x_i$$

Beispiele:

a)

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$
$$\Delta y = a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \ldots + a_n \Delta x_n$$

b)

$$y = a_1 x_1^{\alpha_1} \cdot a_2 x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_n x_n^{\alpha_n}$$
$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

Zufällige Meßfehler

Arithmetischer Mittelwert:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Wahrer Wert:

$$x_w = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{für } N \to \infty$$

Eigenschaften des arithmetischen Mittelwertes:

1) $$\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}) = 0$$

2) $$\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2 = Minimum$$

Standardabweichung

Streuung der Einzelelemente:

Varianz:

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$$

N = Anzahl der Wiederholungsmessungen

Definition:

Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$s \to \sigma \qquad \text{für } N \to \infty$$

σ = Standardabweichung der Grundgesamtheit

Mittlerer Fehler der Einzelmessung x_i:

$$m = \pm\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}\,, \qquad also{:}\ m = \pm s$$

Fortpflanzung der zufälligen Meßfehler

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\overline{y} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n)$$ **Mittelwert**

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^{\;2}}$$ **Standardabweichung**

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 s_i^{\;2}}$$ **Schätzwert für die**

Standardabweichung

Vertrauensbereich für den Mittelwert

$$\overline{\overline{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \overline{x}_i$$

Mit

$$\frac{\partial \overline{\overline{x}}}{\partial \overline{x}_i} = \frac{1}{N}$$

ergibt sich:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Die Standardabweichung der Verteilung der Mittelwerte ist um $1/\sqrt{N}$ kleiner als die Verteilung der Einzelwerte.

Vertrauensbereich für den Mittelwert $\overline{x}$

- **Unendlich viele Einzelmessungen,**
- **N Stichproben von N Meßwerten,**
- **Mittelwerte $\overline{x}$ der Stichproben,**
- **Mittelwerte $\overline{x}$ bilden eine Verteilung, charakterisiert durch neuen Mittelwert $\overline{\overline{x}}$ und Standardabweichung $\sigma_{\overline{x}}$.**

$$\overline{\overline{x}} = \frac{1}{N} \sum \overline{x}_i$$

N groß:

$$\rightarrow \qquad \overline{\overline{x}} = x_w$$

Mit

$$\frac{\partial \overline{\overline{x}}}{\partial \overline{x}} = \frac{1}{N}$$

ergibt sich:

$$\boxed{\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

- **Die Standardabweichung der Mittelwerte ist um $1/\sqrt{N}$ kleiner als die Standardabweichung der Einzelmeßwerte.**

Garantiefehlergrenzen und Klassengenauigkeit

$$G = \frac{Unsicherheit\,\Delta x}{Meßbereichsendwert\ X} = \frac{\Delta x}{X}$$

G = Garantiefehlergrenze
X = Meßbereichsendwert

$$\Delta x = X \cdot G$$

also:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{X}{x} \cdot G$$

Fortpflanzung der Fehlergrenzen

Es gelte:

$$y = f\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Gegeben:

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ **gemessene Größen**

$G_1, G_2, \cdots, G_n$ **Fehlergrenzen (Garantie~)**

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ **Meßbereichsendwerte**

$\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ **Einzelfehler**

Maximal mögliche Unsicherheit Δy*

$$\Delta y^* = \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

z.B.

$$y = a_1 x_1^{\alpha_1} \cdot a_2 x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_n x_n^{\alpha_n}$$

$$\frac{\Delta y^*}{y} = \sum \left| \frac{\Delta x_i}{x_i} \alpha_i \right|$$

Meßwert angegeben als
(Maximale/Sichere Ergebnisfehlergrenzen):

$$y_w = y \pm \Delta y^* = y \cdot \left(1 \pm \frac{\Delta y^*}{y} \right)$$

Wahrscheinliche Unsicherheit Δy**

$$\Delta y^{**} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}$$

z.B.

$$\frac{\Delta y^{**}}{y} = \sqrt{\sum \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \alpha_i \right)^2}$$

Meßwert angegeben als
(Wahrscheinliche Ergebnisfehlergrenzen):

$$y_w = y \pm \Delta y^{**} = y \cdot \left(1 \pm \frac{\Delta y^{**}}{y} \right)$$

Verteilungen

- **Binomial-Verteilung**
- **Poisson-Verteilung**
- **Gauß- oder Nomalverteilung**

Dichtefunktion oder Gaußverteilung

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \qquad für -\infty < x < +\infty$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(x_1 < x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx$$

Sonderfälle:

$$P(-\infty < x \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 1$$

$$P(x \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} h(x)dx$$

$$P(x > x_1) = \int_{x_1}^{+\infty} h(x)dx$$

Dynamisches Verhalten der Meßgeräte

Anregende Funktion	Abk.	Anwortfunktion
Sinusfunktion		**Sinusantwort:** ***Amplituden- und Phasengang; Frequenzgang***
Sprungfunktion	$\sigma(t)$	**Sprungantwort:** ***Übergangsfunktion***
Impulsfunktion	$\delta(t)$	**Impulsantwort:** ***Gewichtsfunktion***

Verzögerungsglied 1. Ordnung

Differentialgleichung eines Verzögerungsglieds 1. Ordnung:

u_e = Eingangsspannung
u_a = Ausgangsspannung

$$a_0 u_a + a_1 \dot{u}_a = e_0 u_e$$ **mit: a_0, a_1, e_0 Konstanten**

$$u_a + \frac{a_1}{a_0}\dot{u}_a = \frac{e_0}{a_0}u_e$$

Stationärer Fall:

$$\dot{u}_a = 0$$

$$u_a = \frac{e_0}{a_0}u_e$$

Also:

Quotient e_0/a_0 entspricht dem vorher definierten Übertragungsfaktor bzw. der Empfindlichkeit E:

$$\frac{e_0}{a_0} = k = E \qquad \frac{a_1}{a_0} = T$$ **(Einheit [Zeit])**

Damit: $$u_a + T \cdot \dot{u}_a = k \cdot u_e$$

Lösung der DGL

Summe einer partikulären Lösung $u_{a,p}$ und der Lösung $u_{a,h}$ der homogenen Gleichung

$$u_a + T \cdot \dot{u}_a = 0$$

$$u_{a,h} = K \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$ **K = Integrationskonstante**

Partikuläre Lösung: $\rightarrow$ **stationärer Fall**

$$u_{a,p} = k \cdot u_e$$

Meßgerät = lineares System:

$\rightarrow$ vollständige Lösung u_a:

$$u_a = u_{a,p} + u_{a,h}$$

$$u_a = k \cdot u_e + K \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Bestimmung der Integrationskonstanten aus der Anfangsbedingung:

$$u_a(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad K = -k \cdot u_e$$

damit: $$\boxed{u_a = k \cdot u_e (1 - e^{-\frac{t}{T}})}$$

Sinusantwort: Frequenzgang

Eingangsspannung: $u_e = \hat{u}_e \cdot \sin(\omega t)$

Ausgangsspannung: $u_a = \hat{u}_a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

gesucht:

$\dfrac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e}$ **Spannungsverhältnis**

φ **Phasenwinkel**

Amplitudengang:

Doppeltlogarithmische Darstellung von $\frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e}$ als Funktion der Frequenz:

$$\log(\frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e}) = f(\log(\omega))$$

Phasengang:

Halblogarithmische Darstellung von φ als Funktion der Frequenz:

$$\varphi = f(\log(\omega))$$

Frequenzgang

Komplexer Ansatz der Spannungen:

$$\underline{u}_e = \hat{u}_e \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{u}_a = \hat{u}_a \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

DGL: $$u_a + T \cdot \dot{u}_a = k \cdot u_e$$

→ $$(1 + j\omega T) \cdot \underline{u}_a = k \cdot \underline{u}_e$$

Frequenzgang G(jω): $$G(j\omega) = \frac{\underline{u}_a}{\underline{u}_e} = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

Amplitudengang: $|G(j\omega)|$ **(Betrag)**

Phasengang: $\varphi(\omega)$

$$G(j\omega) = \frac{\underline{u}_a}{\underline{u}_e} = \frac{k}{1 + j\omega T} \cdot \frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T}$$

$$\mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right] = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\mathrm{Im}\left[G(j\omega)\right] = \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Frequenzgang

Amplitudengang:

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = \sqrt{\left(\frac{k}{1+\omega^2T^2}\right)^2 + \left(\frac{-k\omega T}{1+\omega^2T^2}\right)^2}$$

$$\boxed{\left|G(j\omega)\right| = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}}$$

Phasengang:

$$\tan\varphi = \frac{\dfrac{-k\omega T}{1+\omega^2T^2}}{\dfrac{k}{1+\omega^2T^2}} = -\omega T$$

$$\boxed{\varphi = \arctan(\omega T)} \qquad \omega = 2\pi f$$

Eckfrequenz:

$$\omega_g T = 2\pi f_g T = 1$$

$$\boxed{f_g = \frac{1}{2\pi T}}$$

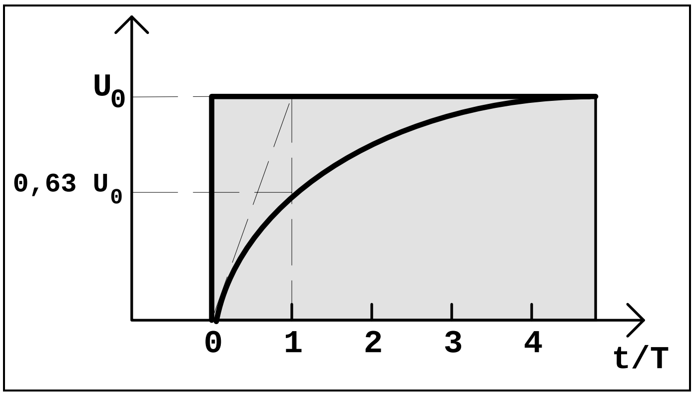
Damit gilt:

$$\boxed{\left|G(j\omega_g)\right| = \left.\frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e}\right|_{\omega_g} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71}$$

Sprungantwort

Eingangssignal:

$$u_e = 0 \qquad \text{für } t \le 0$$
$$u_e = U_0 \qquad \text{für } t > 0$$



Unter Verwendung der Lösung

$$u_a = k \cdot u_e (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

ergibt sich:

$$\boxed{u_a = k \cdot U_0 (1 - e^{-\frac{t}{T}})}$$

Übergangsfunktion h(t):

$$h(t) = \frac{u_a}{U_0}$$

$$\boxed{h(t) = k \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})}$$

Definition:

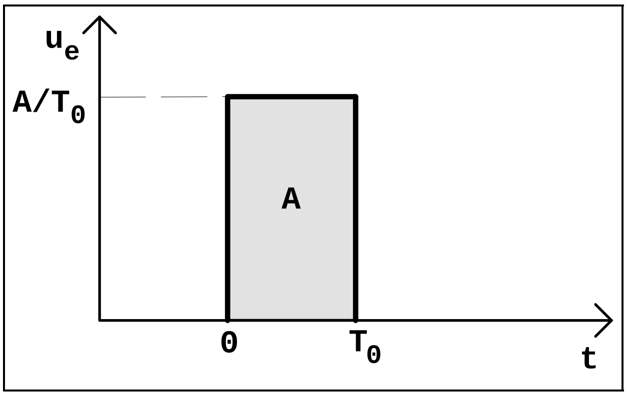
Die Übergangsfunktion h(t) ist die Antwort des Systems auf eine sprungförmige Änderung der Eingangsgröße.

Impulsantwort

Eingangssignal (Anregungssignal):

Spannungsimpuls:

Dauer T_0 und
Höhe A/T_0 (V):



$$u_a + T \cdot \dot{u}_a = k \cdot u_e$$

$$u_a = k \cdot u_e (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \qquad \text{für } 0 < t < T_0$$

$$u_a = \frac{k \cdot A}{T_0} (1 - e^{-\frac{T_0}{T}}) \qquad \text{für } t = T_0$$

$$u_e = 0 \qquad \text{für } t \geq T_0$$

Lösung:

$$u_{a,h} = K \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

$$u_a = \frac{k \cdot A}{T_0} (1 - e^{-\frac{T_0}{T}}) = K \cdot e^{-\frac{T_0}{T}} \qquad \text{für } t = T_0$$

Impulsantwort

cont.

Daraus folgt für die Integrationskonstante:

$$K = \frac{k \cdot A}{T_0}(1 - e^{-\frac{T_0}{T}}) \cdot e^{-\frac{T_0}{T}}$$

und damit:

$$\boxed{u_a = \frac{k \cdot A}{T_0}(1 - e^{-\frac{T_0}{T}}) \cdot e^{-\frac{(t - T_0)}{T}} \qquad \text{für } \; t \geq T_0}$$

<u>Gedankenexperiment:</u>

$$T_0 \to 0, \qquad \frac{1}{T_0} \to \infty$$

$$A = const$$

damit:

$$\lim_{T_0 \to 0} \frac{(1 - e^{-\frac{T_0}{T}})}{T_0} \cdot e^{-\frac{T_0}{T}} = \lim_{T_0 \to 0} \frac{e^{\frac{T_0}{T}} - 1}{T_0} = \frac{0}{0}$$

Unbestimmter Ausdruck: → **Regel von "*de l'Hospital*"**

$$\lim_{T_0 \to 0} \frac{e^{\frac{T_0}{T}} - 1}{T_0} = \lim_{T_0 \to 0} \frac{1}{T} \frac{e^{\frac{T_0}{T}}}{1} = \frac{1}{T}$$

Impulsantwort

cont.

Damit ergibt sich für die Ausgangsspannung:

$$\boxed{u_a = \frac{k \cdot A}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \; [V] \qquad\qquad \text{für} \;\; t \geq 0}$$

Gewichtsfunktion g(t):

$$g(t) = \frac{u_a}{A}$$

$$\boxed{g(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \;\; \left[s^{-1}\right]}$$

Definition:

Die Gewichtsfunktion g(t) ist die Antwort des Systems auf eine impulsförmige Änderung der Eingangsgröße.

Beziehung zwischen den Anregungsfunktionen

Beziehung Gewichtsfunktion/Übergangsfunktion:

$$\boxed{g(t) = \frac{d\,h(t)}{dt}}$$

Beispiel: Tiefpaß

$$h(t) = k \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

damit:

$$\boxed{g(t) = \frac{d\,h(t)}{dt} = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}}$$

Beziehung Gewichtsfunktion/Frequenzgang:

→ Systemtheorie:

Der Frequenzgang G(jω) ist die Fouriertransformierte der Gewichtsfunktion.

$$\boxed{G(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t}\, dt}$$

Gewichtsfunktion/Frequenzgang

Beispiel: Tiefpaß

$$g(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$ **Gewichtsfunktion**

damit:

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{k}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} \cdot e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \frac{k}{T} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} \cdot e^{-j\omega t}\, dt \qquad g(t<0)=0 \\
&= \frac{k}{T} \int_{0}^{+\infty} e^{-(j\omega + \frac{1}{T})t}\, dt \\
&= \frac{k}{T} \left[\frac{-1}{j\omega + \frac{1}{T}} \cdot e^{-(j\omega + \frac{1}{T})t} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{k}{T} \left(0 - \frac{-1}{j\omega + \frac{1}{T}} \right)
\end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}}$$ **Frequenzgang**