Harmonische Analyse / Fourierreihe

Ist eine Funktion f(t) endlich in einem vorgegebenen Bereich, dann kann sie in diesem Bereich durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden:

$$f(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\omega_0 t + B_n \cos n\omega_0 t)$$

Bei einer periodischen Funktion gilt:

$$f(t) = f(t + nT)$$

In diesem Fall ist die obige Darstellung auch außerhalb des Bereiches erfüllt.
Damit läßt sich jeder periodische Zeitverlauf (Spannung, Strom, etc.) als Summe von stationären sinusförmigen Vorgängen mit Frequenzen von Null bis Unendlich ausdrücken.

Definition der Koeffizienten:

B_0:	**Gleichglied,**
A_i, B_i:	**Harmonische**

Für diese Koeffizienten gilt:

$$B_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

mit:

$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ **Periodendauer**

$\omega_0 = 2\pi f$ **Grundfrequenz**

Harmonische Analyse / Fourierreihe

Durch Zusammenfassung von Sinus- und Kosinusgliedern gleicher Frequenz $n\omega_0$ zu einer einzigen harmonischen Schwingung (z.B. Sinusschwingung) ergibt sich eine neue Amplitude C_n und eine Phasenverschiebung φ_n (Phasenwinkel).

Damit gilt:

$$f(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Amplituden und Phasenwinkel berechnen sich nach:

$$C_n = \sqrt{A_n^{\ 2} + B_n^{\ 2}}$$

$$\varphi_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}$$

Unter Heranziehung der Eulerschen Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

kann die Fourierreihe auch in komplexer Schreibweise dargestellt werden:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (n \neq 0)$$

(n positiv und negativ!)

Zusammenhang mit den Koeffizienten A_n, B_n:

$$A_n = j(a_{+n} - a_{-n}) \quad , \quad B_n = a_{+n} + a_{-n}$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$a_0 = B_0 \qquad \text{bei} \quad n = 0$$ **(Gleichwert)**

Fourierintegral und Fouriertransformation

Für einmalige Vorgänge geht ω_0 gegen Null und T gegen Unendlich.

Damit geht die Fourierreihe über in das Fourierintegral:

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(j\omega) e^{j\omega t} dt}$$

Die Koeffizienten $\alpha(j\omega)$ stellen jetzt die komplexe "Amplitudendichte" im Frequenzintervall $d\omega$ dar (damit: andere Dimension als f(t)).

Für ihre Bestimmung gilt:

$$\alpha(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Um das Fourierintegral zu entwickeln, muß für f(t) gelten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

<u>Also</u>:
Das Fourierintegral transformiert eine Funktion f(t) in eine Funktion f(jω).

$\Rightarrow$ **Klasse der Funktionaltransformationen,**
Name: <u>Fouriertranformation</u>.

Mit Hilfe der Fouriertransformation kann man also die in einem Zeitsignal enthaltenen Frequenzen ermitteln:

$\Rightarrow$ **<u>Spektralanalyse</u>, <u>Spektralmessung</u>.**

In der praktischen Anwendung wird eine sogenannte

<u>Harmonische Analyse</u>

durchgeführt, um das Spektrum der Signale aufzuzeichnen.

Fourierintegral und Fouriertransformation

⇒ **<u>Digitale Signalanalyse</u>.**

Zusammenfassung in modifizierter Schreibweise:

<u>Fouriertransformation:</u>

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

⇒ **Spektrum F(jω) wird aus Zeitfunktion f(t) ermittelt.**

<u>Inverse Fouriertransformation:</u>

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

⇒ **Zeitfunktion f(t) wird aus Spektralfunktion F(jω) ermittelt.**

Oftmals wird nur der Betrag

$$\left| F(j\omega) \right|$$

als Funktion von ω oder f betrachtet und als Amplitudenspektrum dargestellt.

Dimensionsbetrachtung:
Aufgrund der Integration über die Zeit ändert sich die Dimension der Spektralfunktion F(jω).

<u>Beispiel:</u> Spannung

f(t) = U(t)	**⇒ [V]**
F(jω)	**⇒ [Vs] = [V/Hz]**

Diskrete Fouriertransformation

Ziel:

Abtastung eines zunächst zeitbegrenzten Signals,
Berechnung der diskreten Fouriertransformation $F_d(j\omega)$.

Die Funktion f(t) wird zu den Zeitpunkten

$$f_n = n \cdot T_a \qquad \text{mit} \quad 0 \le n \le N-1$$

abgetastet.

T_a = Abtastzeit, Abtastintervall.

Für die gesamte Meßzeit gilt damit:

$$T = (N-1) \cdot T_a$$

Damit gilt also:

Die abgetasteten Werte der Funktion f(t) stehen nur zu den diskreten Zeitpunkten nT_a zur Verfügung. Aus der harmonischen Variablen f wird die diskrete Variable nT_a.

Aufgabe:

Aus den diskreten Amplitudenwerten $f(nT_a)$ soll die zugehörige Spektralfunktion berechnet werden. Diese Spektralfunktion wird als

Diskrete Fouriertransformierte
$F_d(j\omega)$ bzw. DFT

bezeichnet.

Das Fourierintegral

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

muß also jetzt mit diskreten Werten bestimmt werden:

Die folgenden Ersetzungen werden deshalb vorgenommen:

$$t \quad \rightarrow \quad nT_a$$

$$f(t) \quad \rightarrow \quad f(nT_a)$$

$$e^{-j\omega t} \quad \rightarrow \quad e^{-j\omega n T_a}$$

Diskrete Fouriertransformation

Außerdem wird das Integral durch eine Summe von Rechtecken

$$f\,(nT_a)\cdot T_a$$

angenähert:

$$\int f\,(t)dt \approx T_a \cdot \sum f\,(nT_a); \qquad T_a = const.$$

Das Abtastintegral wird bei der Definition der DFT nicht berücksichtigt (wird später korrigiert).

Damit ergibt sich:

$$F_d\,(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f\,(nT_a)\, e^{-j\omega nT_a}$$

$$F_d\,(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f\,(nT_a)\cos(\omega nT_a) - j\sum_{n=0}^{N-1} f\,(nT_a)\sin(\omega nT_a)$$

<u>Vergleich der FT kontinuierlicher Signale und der FT diskreter Signale:</u>

a) **Ist die Zeitfunktion gerade ($f_n = f_{-n}$), so ist auch die Spektralfunktion gerade und reell.**

b) **Ist die Zeitfunktion ungerade ($f_n = -f_{-n}$), so ist die Spektralfunktion ungerade und imaginär.**

c) **<u>F(jω)</u> und <u>F(-jω)</u> bzw. <u>F_d(jω)</u> und <u>F_d(-jω)</u> sind konjugiert komplex.**

<u>Darüberhinaus gilt für die DFT:</u>

d) **Die DFT ist über ω periodisch mit der Periode**

$$\frac{2\pi}{T_a}\ ;$$

die DFT ist über f periodisch mit der Periode

$$\frac{1}{T_a} = f_a\quad .$$

Diskrete Fouriertransformation

e) Erst nach Multiplikation mit dem Abtastintervall T_a stimmt die DFT nach Einheit und Größe mit der fouriertransformierten überein.

f) Die DFT muß nur für die diskreten Werke ω_k berechnet werden.

<u>Erläuterung zu d)</u>

Die Exponentialfunktion in $F_d(j\omega)$ hat die Periode 2π:

$$e^{-j\omega n T_a} = e^{-jn(T_a + 2\pi)} = e^{-jnT_a(\omega + \frac{2\pi}{T_a})}$$

Damit gilt also:

$$F_d(j\omega) = F_d\left(j\left[\omega + \frac{2\pi}{T_a}\right]\right)$$

Das bedeutet:

Das Spektrum wiederholt sich periodisch mit

$$\omega = \frac{z \cdot 2\pi}{T_a}$$

bzw. mit

$$f = z \cdot f_a$$ **; z = 1,2,... beliebig ganzzahlig.**

<u>Also:</u>

Während eine periodische Funktion (Fourierreihe) ein diskretes Spektrum hat, ist das Spektrum der durch Abtastung entstandenen diskreten Zeitfunktion periodisch.

Diskrete Fouriertransformation

Aus dieser Periodizität der DFT ergibt sich eine Forderung an die Abtastfrequenz f_a:

Die sich wiederholenden Spektren der DFT dürfen sich nicht überlappen, um eine Verfälschung zu vermeiden.

Das ist erfüllt, wenn gilt:

Die höchste Signalfrequenz f_{max} muß kleiner als die Hälfte der Abtastfrequenz f_a sein:

$$f_{\max} < \frac{1}{2} f_a$$

$$\omega_{\max} < \frac{1}{2} \frac{2\pi}{T_a} = \frac{1}{2} \omega_a$$

<u>Nyquist-Kriterium</u>

Diese Regel wird als

<u>Abtasttheorem</u> (*sample theorem*)
<u>Shannonsches Abtasttheorem</u> (C. Shannon)

bezeichnet.

$$f_N = \frac{f_a}{2}$$

<u>Nyquist-Frequenz</u>

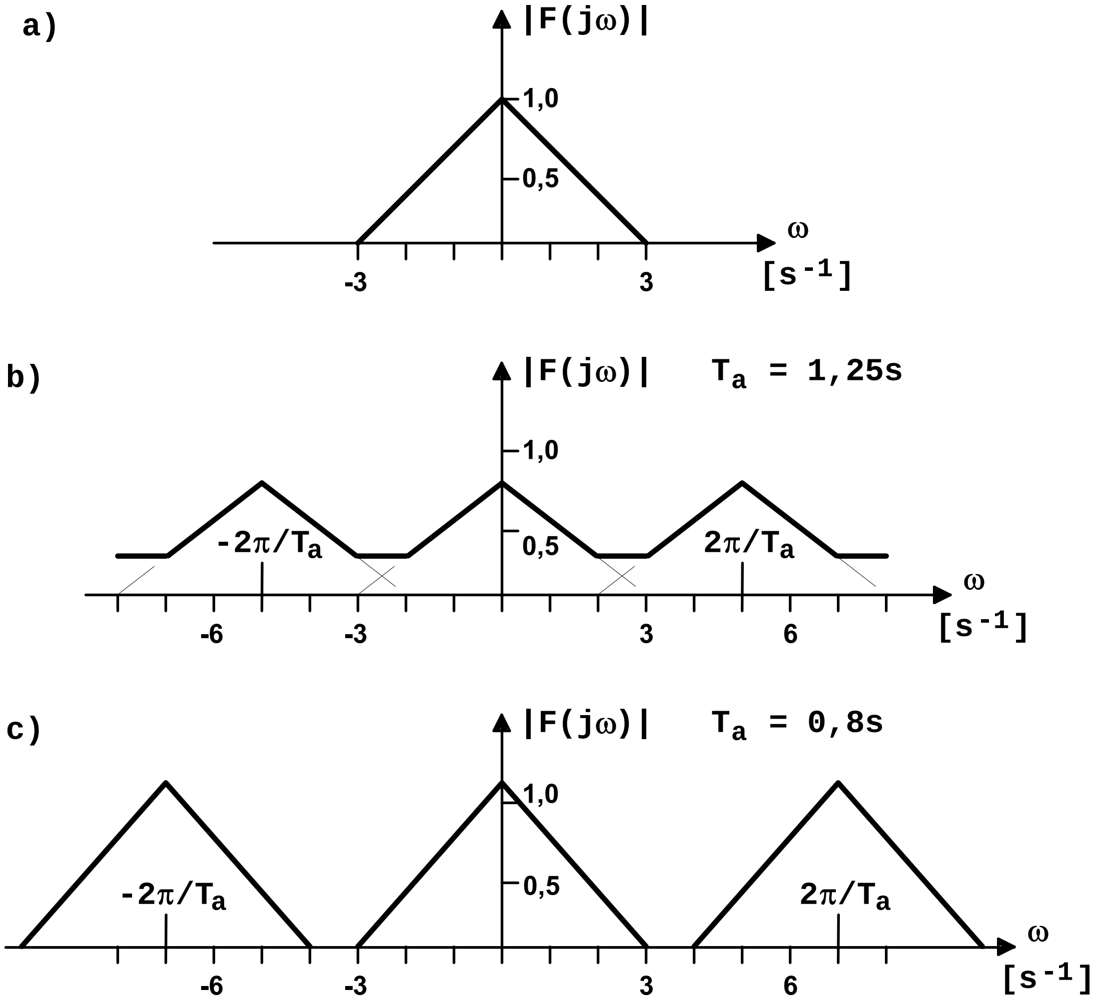
f_a: Abtastfrequenz
f_g: größte im Signal enthaltender Frequenzteil
ω_a: Abtastkreisfrequenz

Die Abtastfrequenz muß demzufolge größer sein als der doppelte Wert der höchsten im Signal enthaltenen Frequenz.

Wenn im Meßsignal $x_e(t)$ hochfrequente Störsignale u(t) mit dem Spektrum $S(f) \neq 0$ für $f > f_N$ enthalten sind, dann erzeugen sie Seitenspektren, die sich dem Grundspektrum überlagern.

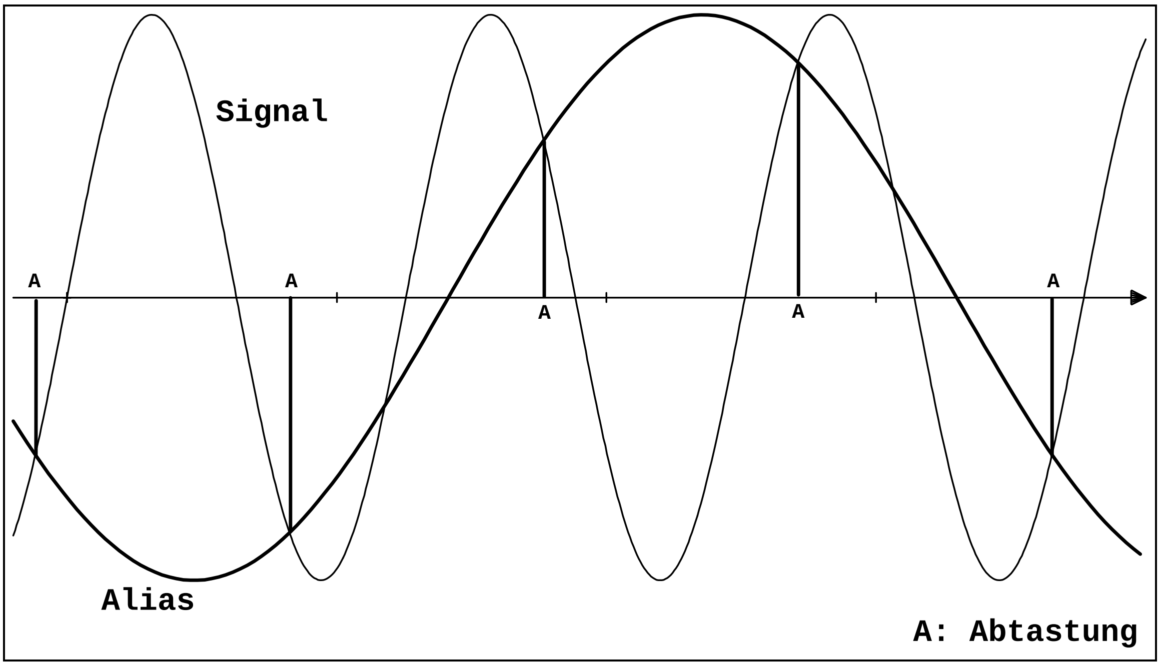
Es treten durch Überlagerung also "<u>stellvertretende Frequenzen</u>" oder "<u>Aliasfrequenzen</u>" auf.

Diskrete Fouriertransformation



Zusammenhang zwischen der Fouriertransformierten und der Diskreten Fouriertransformierten (DFT)

Alias-Effekt / *Aliasing*



Entstehung von Alias-Frequenzen durch Unterabtastung

<u>Frequenzverhältnisse:</u>

Signalfrequenz: f

Abtastfrequenz: $f_a = \frac{4}{3} f$

Aliasfrequenz: $f_a = \frac{1}{3} f$

Ein hochfrequentes Störsignal der Frequenz f_1 mit

$$f_N < f_1 < f_a$$

erzeugt somit nach Abtastung mit f_a eine niederfrequente Störsignalkomponente mit der Frequenz

$$f_2 = f_a - f_1$$

und derselben Amplitude.

Dieser Effekt wird als "<u>Alias-Effekt</u>" bezeichnet.

Alias-Effekt / *Aliasing*

<u>Folge:</u>

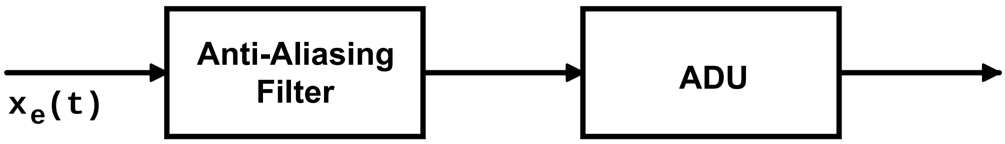
Aus diesen Gründen müssen hochfrequente Störsignale mit wesentlichen Spektraldichten im Frequenzbereich

$$f > f_N = \frac{f_a}{2}$$

bereits <u>vor der Abtastung</u> "weggefiltert" werden.

Dieses Filter nennt man "<u>Anti-Aliasing-Filter</u>".

Das Anti-Aliasing-Filter muß deshalb vor dem Abtaster (z.B. im ADU) eingesetzt werden:



<u>Realisierung:</u>

Z.B. Butterworth-Tiefpaßfilter mit der Bandbreite

$$\omega_B = \frac{\omega_a}{2} = \omega_N$$

Wechselspannung / Wechselstrom

Sinusförmige Wechselspannung:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin \omega t$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

mit: $\hat{u}$ **= Scheitelwert**

ω **= Kreisfrequenz**

T **= Periodendauer**

Wechselspannungsmessung

Linearer (arithmetischer) Mittelwert:

$$\tilde{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{u}\cdot\sin\omega t\,dt$$

$$\tilde{u} = 0$$

für sinusförmige Signale

Gleichrichtwert:

$$|\overline{u}| = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|\,dt$$

$$|\overline{u}| = \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{u}\cdot\sin\omega t|\,dt$$

$$|\overline{u}| = \frac{2}{\pi}\hat{u} = 0{,}637\hat{u}$$

für sinusförmige Signale

Wechselspannungsmessung

Quadratischer Mittelwert, Effektivwert:

(RMS Value, *Root-Mean-Square*)

$$U_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}$$

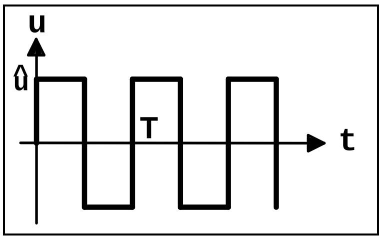
$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (\hat{u}\cdot\sin\omega t)^2\,dt}$$

$$U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\hat{u}$$

für sinusförmige Signale

Beispiel:

Berechnung des Effektivwerts einer Rechteckspannung



$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2}\hat{u}^2\,dt + \int_{T/2}^{T}(-\hat{u})^2\,dt\right)}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\hat{u}^2 T}$$

$$\underline{U_{eff} = \hat{u}}$$

Formfaktoren

Scheitelfaktor (*Crest-Factor*):

$$k_s = Scheitelfaktor = \frac{Scheitelwert}{Effektivwert}$$

$$k_s = \frac{\hat{u}}{0{,}707\hat{u}} = 1{,}41$$

für sinusförmige Signale

Formfaktor:

$$k_f = Formfaktor = \frac{Effektivwert}{Gleichrichtwert}$$

$$k_f = \frac{0{,}707\hat{u}}{0{,}637\hat{u}} = 1{,}11$$

für sinusförmige Signale

Die Kalibrierung von Gleichrichtermeßgeräten erfolgt in Effektivwerten für sinusförmige Signale. Der entsprechende Formfaktor (1,11) wurde bereits bei der Skaleneinteilung berücksichtigt.

Bei Abweichung von der Sinusform kann der Effektivwert unter Benutzung des zur Signalform gehörenden Formfaktors k_f (s.u.) berechnet werden.

Beispiel:

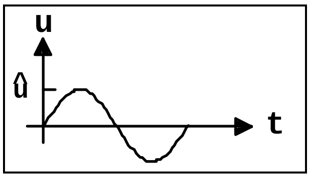
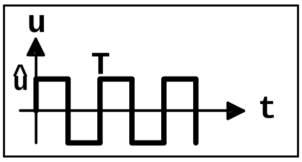
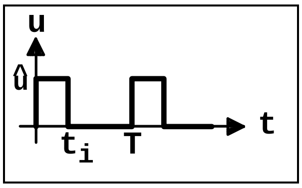
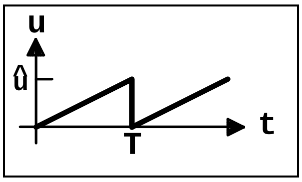
Effektivwert der Dreiecksspannung:

$$u_\Delta = u \cdot \frac{k_\Delta}{1{,}11}$$

mit: u = angezeigter Wert,
k_Δ = Formfaktor der Dreiecksfunktion.

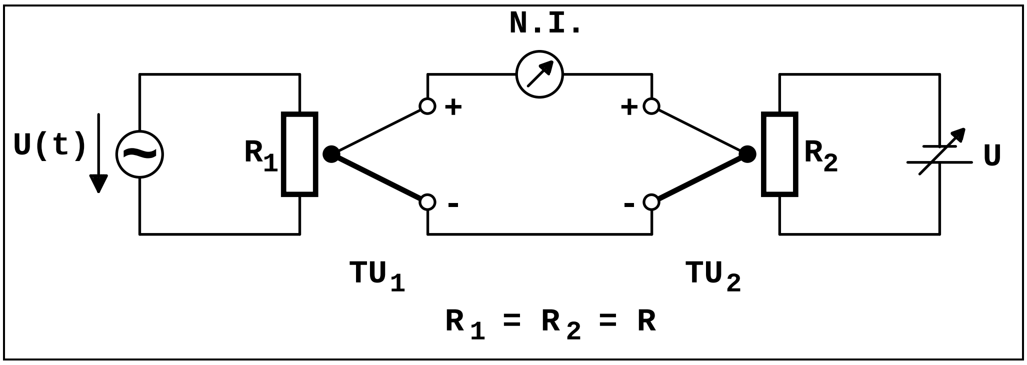
Scheitel- und Formfaktor

Abhängigkeit des Scheitel- und Formfaktors von der Signalform:

Signal	k_s	k_f	Zeitverlauf u(t)
Sinusfunktion	**1,41**	**1,11**	
Rechteckfunktion	**1,0**	**1,0**	
Impuls mit **Tastverhältnis** $k = \frac{t_i}{T}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	
Rampenfunktion **(Dreiecksfunktion)**	**1,73**	**1,15**	

Elektronische Wechselspannungsmessung

Effektivwertmessung:

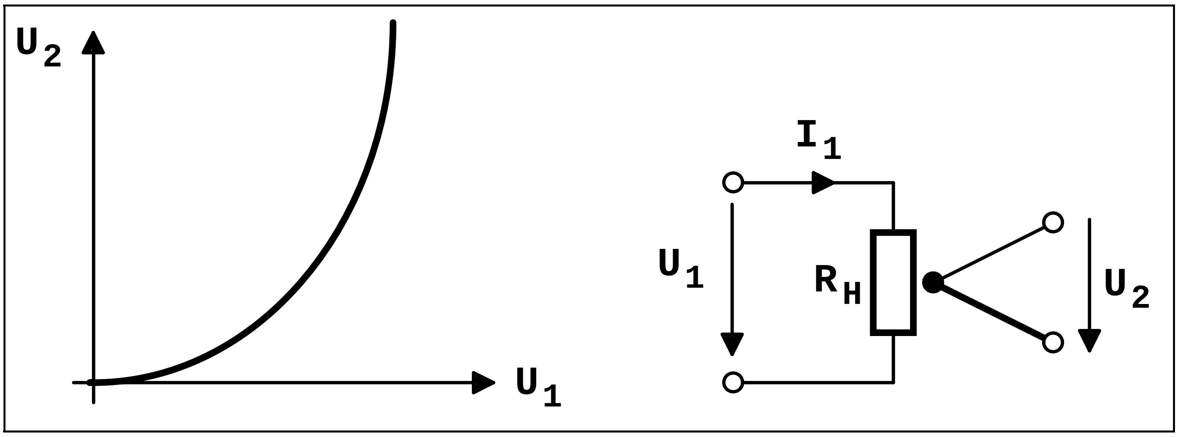


TU: Thermoumformer

Nullabgleich:

$$\frac{1}{R}\int_0^T u^2(t)dt = \frac{U^2}{R}T$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$ **Effektivwert**



Kennlinie eines Thermoumformers

$$U_2 = K_T \cdot U_1^2$$

Typische Kenndaten:

$R_H = 90\Omega$	$I_1 = 5mA$
$K_T \approx 35 \cdot 10^{-3} V$	$U_2 = 7mV$
$f_{\max} \approx 100\,MHz$	

Klirrfaktor
THD: *Total Harmonic Distortion*

Der Klirrfaktor ist ein Maß für <u>nichtlineare Verzerrungen</u>.

<u>Definition:</u>

$$k = \frac{\sqrt{U_2{}^2 + U_3{}^2 + \cdots + U_n{}^2}}{U} = \frac{\sqrt{U_2{}^2 + U_3{}^2 + \cdots + U_n{}^2}}{\sqrt{U_1{}^2 + U_2{}^2 + U_3{}^2 + \cdots + U_n{}^2}}$$

mit:

U	=	**Gesamteffektivwert (ohne Gleichspannungsanteil),**
$\sqrt{U_2{}^2 + U_3{}^2 + \cdots + U_n{}^2}$	=	**Effektivwert der Oberwellen.**
U_1	=	**Effektivwert der Grundwelle.**

$k_2 = \frac{U_2}{U}$ **Teilfaktor der 2. Harmonischen**

$k_n = \frac{U_n}{U}$ **Teilfaktor der n. Harmonischen**

$$k = \sqrt{k_2{}^2 + k_3{}^2 + \cdots + k_n{}^2}$$

Bei kleinen Klirrfaktoren kann an Stelle des Gesamteffektivwertes U der Effektivwert der Grundwelle U_1 gesetzt werde.

<u>Definition:</u>

Klirrdämpfung: $a_k = 20 \lg \frac{1}{k} \quad [dB]$